ＩＤ　初等線形代数から多変数の微積分　講義報告[2]

２００８年2月１7日（日）　１１：００－１３：００

前回、扱ったJacobi行列を用いて、積分の極座標への変数変換公式を導いた。また、対称関数の積分と対称変換について扱った。

1.5　２次元極座標

２次元極座標とは、次の式で与えられる平面の表現である。

$$x = (\xi, \eta) \quad \begin{cases} \xi = r\cos\theta \\ \eta = r\sin\theta \end{cases}$$

ただし、$r > 0,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ である。

補題 1.1.

$$\Psi : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \ni (r, \theta) \to (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

すなわち、

$$\Psi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (\xi, \eta) \quad r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi)$$

とするとき、

1. Ψ は全単射である。

2. Ψ^{-1} は連続微分可能である。

3. (r, θ) は直交座標系である。

4. Ψ の *Jacobi* 行列 J_Ψ は、

$$J_\Psi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

定理 1.4. g を領域 $D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ からへの写像とするとき、

$$\int_D g(\xi, \eta)\ |d\xi d\eta| = \int_D g(\Psi(r, \theta))|det(J_\Psi(r, \theta))|\ |drd\theta| = \int_D g(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ |drd\theta|$$

1.6　３次元極座標

３次元極座標とは、次の式で与えられる空間の表示である。

$$x = (\xi, \eta, \sigma) \quad \begin{cases} \xi = r\sin\theta\cos\varphi \\ \eta = r\sin\theta\sin\varphi \\ \sigma = r\cos\theta \end{cases}$$

ただし、$r > 0,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$ である。

[2]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

補題 1.2.

$$\Psi : \mathbb{R}_+ \times (0,\pi) \times [0,2\pi) \ni (r,\theta,\varphi) \to (\xi,\eta,\sigma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

すなわち、

$$\Psi(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) = (\xi,\eta,\sigma) \quad r>0,\ \theta\in(0,\pi),\ \varphi\in[0,2\pi)$$

とするとき、

1. Ψ は全単射である。

2. Ψ^{-1} は連続微分可能である。

3. (r,θ,φ) は直交座標系である。

4. Ψ の *Jacobi* 行列 J_Ψ は、

$$J_\Psi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

定理 1.5. g を領域 $D \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ からへの写像とするとき、

$$\begin{aligned}\int_D g(\xi,\eta,\sigma)\ |d\xi d\eta d\sigma| &= \int_D g(\Psi(r,\theta,\varphi))|det(J_\Psi(r,\theta,\varphi))|\ |drd\theta d\varphi| \\ &= \int_D g(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2\sin\theta\ |drd\theta d\varphi|\end{aligned}$$

1.7 領域 I^n 上での積分

定義 1.1 (対称関数). $\mathbb{R}^n$ の上で定義された関数 f が**対称関数（対称式）**であるとは、任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して、

$$(\sigma f)(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) = f(\xi_{\sigma(1)},\xi_{\sigma(2)},\cdots,\xi_{\sigma(n)}) = f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$$

が成立することである。

演習問題 1.1. f を $\mathbb{R}^n$ 上で定義された対称関数とするとき、区間 $I=[\alpha,\beta]$ の直積領域 I^n 上での関数 f の積分は

$$\int_{I^n} f(x)|dx| = n!\int_J f(x)|dx|$$

$$\text{ただし、}J = \{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha < \xi_1 \le \xi_2 \le \cdots \le \xi_n \le \beta\}$$

となることを示せ。特に、g を閉区間 I 上の連続関数とするとき、次の公式を示せ。

$$\left(\int_I g(\xi)d\xi\right)^n = n!\int_J g(\xi_1)g(\xi_2)\cdots g(\xi_n)\ d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_n$$

1.8　正定値対称変換

演習問題 1.2. S を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への全単射な正定値対称変換とし、$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ を S の固有値とするとき、

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-\langle x, Sx \rangle)|dx| = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}} = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{det\ S}}$$

が成立することを示せ。

編集　J.S